% ----Create By Dr.Buraskorn Nuntadilok 2018----

%-----------------------------------------------------------

\documentclass[11pt,a4paper,twoside]{article}

\usepackage{xltxtra,xunicode,fontspec}

\usepackage{graphicx,amsmath,latexsym,amssymb,amsthm}

\usepackage{eucal}

\usepackage{fancyhdr}

\usepackage{titlesec}

\usepackage[top=1in, bottom=1in, left=1.5in, right=1in]{geometry}%กำหนดหน้ากระดาษ

%~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

% >>>>>ตั้งค่าตัวอักษร ขนาดตัวอักษร และขนาดบรรทัด

%~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

\XeTeXlinebreaklocale “th\_TH” %สำหรับตัดคำภาษาไทย

\setmainfont[Scale=1.5]{THSarabunPSK} %ชื่อfontภาษาไทย THSarabunPSK 11\*1.5=16.5

%\setmainfont[Scale=1.5]{Browallia New} %ชื่อfontภาษาไทย Browallia New

\XeTeXlinebreakskip = 0pt plus 1pt

\linespread{1.4}%ขนาดอักษร 11\*1.4=15.4

%~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

% >>>>>ตั้งค่าเลขหน้า ตามลำดับการนำเสนอหน้าชั้นเรียน

%~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

\pagestyle{fancy}

\fancyhf{}

\fancyhead[LE,RO]{no.-\thepage}

\fancyhead[RE,LO]{โครงการสัมมนาวิชาการและนำเสนอผลงานด้านคณิตศาสตร์ ครั้งที่ ๖}

%\renewcommand{\headrulewidth}{0pt}

%\lhead{}\chead{}\rhead{ลำดับ-\thepage} %<--

\lfoot{}\cfoot{}\rfoot{}

%~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

% >>>>>ตั้งค่าหัวข้อ หัวข้อย่อยต่างๆ เช่น บทนำ ความรู้พื้นฐาน ...

%~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

\titleformat{\section}

{\normalfont\Large\bfseries}{\thesection}{0.5em}{}

\titleformat{\subsection}

{\normalfont\large\bfseries}{\thesubsection}{0.5em}{}

\titleformat{\subsubsection}

{\normalfont\large\bfseries}{\thesubsubsection}{0.5em}{}

%~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

% >>>>>ตัวเลขของสมการ จะตามหัวข้อในแต่ละSection

%~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

\numberwithin{equation}{section}

%~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

% >>>>>เอาจุดที่อยู่ท้าย "ทฤษฎีบท/ตัวอย่าง" ออก

%~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

%\swapnumbers

\usepackage{xpatch}

\makeatletter

\xpatchcmd{\@thm}{\thm@headpunct{.}}{\thm@headpunct{}}{}{}

\makeatother

%~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

% >>>>>เปลี่ยนชื่อ คำ จากภาษาอังกฤษ ให้เป็น ภาษาไทย

%~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

\renewcommand{\figurename}{รูปที่}

\renewcommand{\tablename}{ตารางที่}

\renewcommand{\proofname}{\bf{การพิสูจน์}}

\renewcommand{\refname}{เอกสารอ้างอิง}

\renewcommand{\qedsymbol}{$\blacksquare$} %แทนกล่องสี่เหลี่ยมท้ายพิสูจน์ ด้วยกล่องสีดำ

%\renewcommand{\thebibliography}{บรรณานุกรม}

%~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

%

%>>>>>>>>>>> you CAN edit the following part <<<<<<<<<<<

%

%~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

%~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

% >>>>>การตั้งรูปแบบและการใช้คำสั่งเพื่อพิมพ์ บทนิยาท ทฤษฎีบท ฯลฯ

%~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

\theoremstyle{definition}

%\theoremstyle{plain}

%1. เพิ่มทฤษฎีบทด้วยการพิมพ์คำสั่ง \begin{theorem} แล้วปิดด้วยคำสั่ง \end{theorem}.

\newtheorem{theorem}{ทฤษฎีบท}

%2. เพิ่มบทตั้งด้วยการพิมพ์คำสั่ง \begin{lemma} แล้วปิดด้วยคำสั่ง \end{lemma}.

\newtheorem{lemma}[theorem]{บทตั้ง}

%3. เพิ่มบทแทรกด้วยการพิมพ์คำสั่ง \begin{corol} แล้วปิดด้วยคำสั่ง \end{corol}.

\newtheorem{corol}{บทแทรก}[theorem]

%4. เพิ่มประพจน์ด้วยการพิมพ์คำสั่ง \begin{prop} แล้วปิดด้วยคำสั่ง \end{prop}.

\newtheorem{prop}[theorem]{ประพจน์}

%\theoremstyle{definition}

%5. เพิ่มบทนิยามด้วยการพิมพ์คำสั่ง \begin{definition} แล้วปิดด้วยคำสั่ง \end{definition}.

\newtheorem{definition}[theorem]{บทนิยาม}

%6. เพิ่มตัวอย่างด้วยการพิมพ์คำสั่ง \begin{example} แล้วปิดด้วยคำสั่ง \end{example}.

\newtheorem{example}[theorem]{ตัวอย่าง}

%7. เพิ่มปัญหาด้วยการพิมพ์คำสั่ง \begin{problem} แล้วปิดด้วยคำสั่ง \end{problem}.

\newtheorem{problem}[theorem]{ปัญหา}

\theoremstyle{remark}

%8. เพิ่มหมายเหตุด้วยการพิมพ์คำสั่ง \begin{remark} แล้วปิดด้วยคำสั่ง \end{remark}.

\newtheorem{remark}{หมายเหตุ}

%9. เพิ่มข้อสังเกตด้วยการพิมพ์คำสั่ง \begin{notation} แล้วปิดด้วยคำสั่ง \end{notation}.

\newtheorem{notation}{ข้อสังเกต}

% You can create a command which is commonly used in the thesis.

%~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

% >>>>>การสร้างคำสั่งเพื่อพิมพ์ สัญลักษณ์ในคณิตศาสตร์

%~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

\newcommand{\bR}{{\mathbb{R}}} %%%R=Real number

\newcommand{\bC}{{\mathbb{C}}} %%%C=Complex number

\newcommand{\bN}{{\mathbb{N}}} %%%N=Natural number

\newcommand{\bF}{{\mathbb{F}}}

\newcommand{\cF}{{\mathcal F}}

\newcommand{\cS}{{\mathcal S}}

\newcommand{\ep}{{\varepsilon}}

%~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

%เริ่มพิมพ์เนื้อหาตั้งแต่ตรงนี้เป็นต้นไป ให้พิมพ์ระหว่าง \begin{document} และ \end{document}

%~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

\begin{document}

%\thispagestyle{empty}

\begin{center}

\Large{\textbf{วิธีที่มีประสิทธิภาาพสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ริคาติกำลังสอง}} \\

\Large{\textbf{An Efficient Method }}\\

\Large{\textbf{for Quadratic Riccati Differential Equation}} \\

\normalsize{\textbf{แหล่งที่มา:~Hossein Aminikhah \& Milad Hemmatnezhad (2010), \textit{Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation}, 15(3), 123–145}}\\

\large{\textbf{จัดทำโดย:~นางสาวสุดสวย~รวยความรู้}}\\

\hrulefill \\

\vspace\*{0.5cm}

\textbf{บทคัดย่อ}

\vspace\*{0.2cm}

\end{center}

~~~~ในบทความนี้ได้มีการนำวิธีการโฮโมโทพีเพอร์เทอร์เบชันรูปแบบใหม่มาใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ของสมการริคคาติกำลังสอง ในวิธีการนี้จะต้องพิจารณาว่าการกระจายแบบอนุกรมเทเลอร์นี้ ลู่เข้าสู่ผลเฉลยที่แท้จริงของสมการไม่เชิงเส้น ซึ่งได้ผลเฉลยที่แท้จริงของสมการริคคาติที่มีประสิทธิภาพ และความเรียบง่ายสำหรับวิธีการที่นำเสนอมาจะทำให้เข้าใจง่ายขึ้น

\begin{center}

\hrulefill

\end{center}

%หัวข้อที่1-----------------------------------------

**\section{บทนำ}**

~~~~~ในช่วงไม่กี่ปีที่ผ่านมาความสนใจที่เพิ่มขึ้น ของนักวิทยาศาสตร์และวิศวกรได้สนใจเกี่ยวกับวิธีการวิเคราะห์เชิงเส้นสำหรับการแก้ปัญหาที่ไม่เป็นเชิงเส้น วิธีการเชิงตัวเลขแบบใหม่จำนวนมากได้ถูกนำมาประยุกต์ใช้กันอย่างกว้างขวางในปัญหาที่ไม่เป็นเชิงเส้น วิธีการวิเคราะห์โดยทั่วไปคือวิธีการวิเคราะห์แบบโฮโมโทพี (HAM) และวิธีการโฮโมโทพีเพอร์เทอร์เบชัน (HPM) ซึ่งก่อตั้งโดย เรียว ชีจุน (Liao Shijun.) ในปี ค.ศ.1992 ตามลำดับ ฮี (He JH.) ได้แก้ปัญหาเกี่ยวกับอนุกรมของสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น\\

\indent เราได้แนะนำวิธีการโฮโมโทพีเพอร์เทอร์เบชัน (HPM)รูปแบบใหม่ที่สามารถแก้สมการเชิงอนุพันธ์ริคคาติได้อย่างมีประสิทธิภาพ วิธีการโฮโมโทพีเพอร์เทอร์เบชัน (HPM)ของ ฮี(He JH.) ได้ถูกนำไปใช้โดยนักคณิตศาสตร์และวิศวกรหลายคนในการแก้ปัญหาสมการต่าง ๆ ในวิธีการนี้ ปัญหาไม่เชิงเส้นจะถูกแปลงเป็นปัญหาย่อยที่มีจำนวนไม่สิ้นสุดและจากนั้นวิธีแก้ปัญหาจะถูกประมาณโดยผลรวมของการแก้ปัญหาสำหรับอันดับแรกของบางปัญหาย่อย

%หัวข้อที่2-----------------------------------------

**\section{ความรู้พื้นฐาน}**

\definition{ ในทางคณิตศาสตรจะกลาววาเมทริกซจะเปนเมทริกซ์} diagonally dominant ถาสมาชิก ทุกๆตัวในแถวของเมทริกซในแนวทแยงมีคาของผลรวมมากกวาหรือเทากับ ผลรวมของสมาชิกตัว อื่นในแถวเดียวกัน (ที่ไมใชสมาชิกในแนวทแยงมุม) สมาชิกในแถวนั้นอยางแมนยำมากขึ้น เมทริกซ $A$ จะเปนเมทริกซ์ diagonally dominant ถา $$|a\_{ii}| \geq\sum\_{j \not=i} |a\_{ii}|$$ เมื่อ $a\_{ij}$ หมายถึงสมาชิกแถวที่ $i$ หลักที่ $j$\\

ยกตัวอย่างเช่น

\begin{align\*}

A =

\begin{bmatrix}

3&-2&1\\

1&-3&2\\

-1&2&4

\end{bmatrix}

\end{align\*}

เปนเมทริกซ์ diagonallydominant เพราะวา

\begin{align\*}

|a\_{11}| \geq |a\_{12}|+|a\_{13}|\\

|a\_{22}| \geq |a\_{21}|+|a\_{23}|\\

|a\_{33}| \geq |a\_{31}|+|a\_{32}|

\end{align\*}

นั่นคือ

\begin{align\*}

|+3| \geq |-2|+|+1| = 3\\

|-3| \geq |+1|+|+2| = 3\\

|+4| \geq |-1|+|+2| = 3

\end{align\*}

\definition{นอร์มของเมทริกซ์ (Norm of metrix)}

\begin{align\*}

\begin{Vmatrix}

A

\end{Vmatrix}

= max(\sum\_{i=1}^{n} |a\_{ij}|)~ \text{เมื่อ}~ 1\leq ่่j \leq n\\

\begin{Vmatrix}

A

\end{Vmatrix}\_{\infty}

= max(\sum\_{j=1}^{n} |a\_{ij}|)~ \text{เมื่อ}~ 1\leq ่่i\leq n

\end{align\*}

\begin{align\*}

\text{ตัวอย่าง} A &=

\begin{bmatrix}

5&-4&2\\

-1&2&3\\

-2&1&0

\end{bmatrix}\\

\begin{Vmatrix}

A

\end{Vmatrix}

&= max(|5|+|-1|+|-2|,|-4|+|2|+|1|,|2|+|3|+|0|)\\

&= max(5+1+2,4+2+1,2+3+0)\\

&= max(8,7,5)\\

&= 8\\

\begin{Vmatrix}

A

\end{Vmatrix}\_{\infty}

&= max(|5|+|-4|+|2|,|-1|+|2|+|3|,|-2|+|1|+|0|)\\

&= max(5+4+2,1+2+3,2+1+0)\\

&= max(11,6,3)\\

&= 11

\end{align\*}

\begin{theorem}

ถ้าเมทริกซ์ $A$ เป็นเมทริกซ์ diagonally dominant และ $B=[b\_{ij}]$ โดยที่

\begin{align\*}

b\_{ij} =

\begin{cases}

1~;~i = j\\

\frac{a\_{ij}}{a\_{ii}}~;~i \not= j

\end{cases}

\end{align\*}

แล้ว

$\begin{Vmatrix}

B-I

\end{Vmatrix}\_{\infty} < 1$

\end{theorem}

\begin{theorem}

ให A เปนเมทริกซใดๆ

\begin{align\*}

\text{ถ้า}

\begin{Vmatrix}

A-I

\end{Vmatrix}

< 1

\hspace\*{0.5cm} \text{แลวลำดับ} \hspace\*{0.5cm}u^{[m]} &= [ \sum\_{k=0}^{m} (A-I)^k ]b \hspace\*{0.5cm} \text{จะเป็นลำดับโคชี}\\

\text{หมายเหตุ นั่นคือ} \hspace\*{0.5cm} u^{[m]} &= [ \sum\_{k=0}^{m} (A-I)^k ]b \hspace\*{0.5cm}\text{เป็นลำดับลู่เข้า}

\end{align\*}

\end{theorem}

\definition{เมทริกซ์แต่งเติม (Augmented Matrix) เมทริกซ์ที่เกิดจากการรวมกันของเมทริกซ์อื่นสองเมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากัน}

\begin{theorem}

ให้ $AX=B$ และ $CX=D$ เป็นระบบสมการเชิงเส้น 2 ระบบที่มี m สมการและ n ตัวแปร ถ้าเมทริกซ์แต่งเติม $[A:B]$ สมมูลตามแถวกับเมทริกซ์ $[C:D]$ จะได้ว่า ระบบสมการเชิงเส้นทั้งสองมีผลเฉลยเดียวกัน

\end{theorem}

เช่น ระบบสมการ

\begin{align\*}

x+3y = 1\\

2x+y = 2

\end{align\*}

\hspace\*{0.5cm} จะได้

\begin{align\*}

\begin{bmatrix}

1&3\\

2&1

\end{bmatrix}

\begin{bmatrix}

x\\y

\end{bmatrix}

=

\begin{bmatrix}

1\\2

\end{bmatrix}

\end{align\*}

\hspace\*{0.5cm} เขียนในรูปเมทริกซ์แต่งเติมได้

\begin{align\*}

A=\left[\begin{array}{cc|c}

1&3&1\\

2&1&2

\end{array}\right]

\end{align\*}

\definition{อิสระเชิงเส้น}

ให้ $S = \{v\_1,v\_2,...,v\_n\}$ เป็นสับเซต ที่ไม่ว่าง ของปริภูมิเวกเตอร์ $V$ จะกล่าวว่า $S$ เป็นอิสระเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อ มีสมบัติว่า ถ้า $a\_1v\_1+a\_2v\_2+...+a\_nv\_n = \bar0$ แล้ว $a\_1 = a\_2 =...= a\_n = 0$\\

ยกตัวอย่างเช่น\\

ให้ $S =\{v\_1,v\_2\}$ โดยที่ $v\_1=[1~~0],v\_2=[0~~1]$ จงพิจารณาว่า $S$ เป็นอิสระเชิงเส้นใน $\bR^2$ หรือไม่\\

วิธีทำ\hspace\*{0.2cm} สมมุติให้ $av\_1+bv\_2 = \bar0$\\

\hspace\*{1cm} แสดงว่า $a[1~~0]+b[0~~1] = [0~~0]$\\

\hspace\*{2.5cm} $[a~~0]+[0~~b] = [0~~0]$\\

\hspace\*{2.5cm} $[a~~b] = [0~~0]$\\

\hspace\*{1cm} จะเห็นว่า\\

\hspace\*{2.5cm} $a=0$ และ $b=0$\\

ดังนั้น $S = \{v\_1,v\_2\}$ เป็นอิสระเชิงเส้น

%หัวข้อที่3-----------------------------------------

**\section{เนื้อหา}**

**\subsection{แนวคิดพื้นฐานสำหรับโฮโมโทพีเพอร์เทอร์เบชันรูปแบบใหม่}**

~~~~~ เพื่ออธิบายแนวคิดพื้นฐานของวิธีการนี้~~เพื่อพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นดังนี้

\begin{equation}

A(u(x)) - f(r(x)) = 0 , \indent r(x) \in \Omega

\**label{a}**

\end{equation}

\indent ที่มีเงื่อนไขขอบเขตดังต่อไปนี้

\begin{equation}

B(u(x),\frac{\partial u(x)}{\partial n} ) = 0 , \indent r(x) \in \Gamma

\**label{b}**

\end{equation}

\indent โดยที่ $A$ คือตัวดำเนินการทั่วไป, $B$ คือตัวดำเนินการขอบเขต, $f(r(x)) $ คือฟังก์ชันวิเคราะห์ และ $\Gamma $ คือขอบเขตของโดเมน $\Omega $\\

\indent ตัวดำเนินการ $A$ สามารถแบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ $L, N$ โดยที่ $L$ คือตัวดำเนินการเชิงเส้น และ $N$ คือตัวดำเนินการไม่เชิงเส้น\\

\indent ดังนั้น สมการ (\ref{a}) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

\begin{equation}

L(u(x)) + N(u(x)) - f(r(x)) = 0

\**label{c}**

\end{equation}

โดยจะใช้เทคนิคโฮโมโทพี สร้างสมการโฮโมโทพี $U(r(x),p) \colon \Omega \times [0,1] \rightarrow \bR$ ที่

\begin{equation}

H(U(x),0) = (1 - p) [L(U(x)) - L(u\_0(x))] ~ + ~ p[A(U(x)) - f(r(x))] = 0 ,

\**label{d}**

\end{equation}

\begin{equation}

\text{โดยที่} \indent p \in [0,1],\indent r(x) \in \Omega \nonumber

\end{equation}

หรือ

\begin{equation}

H(U(x),0) = L(U(x)) - L(u\_0(x)) + pL(u\_0(x))+ p[N(U(x)) - f(r(x))] = 0 ,

\**label{e}**

\end{equation}

ที่ $p \in [0,1] $ เป็นตัวแปรเฉพาะ, ~~$u\_0(x)$ เป็นค่าเริ่มต้นของการแก้สมการ (\ref{a}) \\

จากสมการ (\ref{d}) และ (\ref{e}) จะได้

\begin{equation}

H(U(x),0) = L(U(x)) - L(u\_0(x)) = 0 ,

\**label{f}**

\end{equation}

\begin{equation}

H(U(x),1) = A(U(x)) - f(r(x)) = 0 ,

\**label{g}**

\end{equation}\\

ซึ่งสอดคล้องกับวิธีการโฮโมโทพีเพอร์เทอร์เบชัน ~~ให้พารามิเตอร์ฝั่งตัว $p$ เป็นพารามิเตอร์ขนาดเล็ก และ สมมติให้ผลเฉลยของสมการ (\ref{d}), (\ref{e}) ที่สามารถแสดงเป็นอนุกรมกำลังของ $p$ จะได้

\begin{equation}

U(x) = \sum\_{n=0}^{\infty}p^ nU\_n

\**label{h}**

\end{equation}

เขียนสมการ (\ref{e}) ในรูปแบบดังต่อไปนี้\\

จากสมการ (\ref{e})

\begin{eqnarray}

H(U(x),0) &=& L(U(x)) - L(u\_0(x)) + pL(u\_0(x))+ p[N(U(x)) - f(r(x))] = 0 , \nonumber \\

L(U(x)) &=& u\_0(x) + p[ f(r(x) - u\_0(x) - N(U(x)) ]

**\label{i}**

\end{eqnarray}

ใช้ตัวดำเนินการผกผัน $L^{-1}$ ไปยังสองข้างของสมการ (\ref{i}) \\

จาก

\begin{eqnarray}

L(U(x)) & =& u\_0(x) + p[ f(r(x) - u\_0(x) - N(U(x)) ], \nonumber \\

L^{-1}\left(L(U(x))\right) & =& L^{-1} \left( u\_0(x) + p[ f(r(x) - u\_0(x) - N(U(x)) ]\right), \nonumber

\end{eqnarray}

จะได้

\begin{equation}

U(x) = L^{-1}( u\_0(x)) + p[ L^{-1}(f(r(x)) - L^{-1}(u\_0(x)) -L^{-1}( N(U(x))) ]

\**label{j}**

\end{equation}

สมมติให้ค่าประมาณเริ่มต้นของสมการ (\ref{a}) มีรูปแบบดังนี้

\begin{equation}

u\_0(x) = \sum\_{n=0}^{\infty}a\_nP\_n (x)

\**label{k}**

\end{equation}

โดยที่ $a\_0, a\_1, a\_2, ... $ เป็นสัมประสิทธิ์ไม่ทราบค่า และ $P\_0(x), P\_1(x), P\_2(x), ... $ เป็นฟังก์ชันเฉพาะที่ขึ้นอยู่กับปัญหา \\

แทนสมการ (\ref{h}) และ (\ref{k}) ลงในสมการ (\ref{j}) จะได้

\begin{eqnarray}

\sum\_{n=0}^{\infty}p^ nU\_n &=& L^{-1} \left(\sum\_{n=0}^{\infty}a\_nP\_n (x) \right) + p\left[ L^{-1}(f(r(x)) - L^{-1} \left(\sum\_{n=0}^{\infty}a\_nP\_n (x) \right)\right.\nonumber \\ &-&\left. L^{-1}( N\left(\sum\_{n=0}^{\infty}p^ nU\_n(x)\right) \right]

**\label{l}**

\end{eqnarray}

เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของขอบเขตที่มีกำลังเหมือนกันของ $p$ จะได้

\begin{eqnarray}

&p^0&: U\_0(x) = L^{-1} \left(\sum\_{n=0}^{\infty}a\_nP\_n (x)\right), \nonumber \\

&p^1&: U\_1(x) = L^{-1}(f(r(x)) - L^{-1} \left( \sum\_{n=0}^{\infty}a\_nP\_n (x)\right)-L^{-1}N(U\_0(x))), \nonumber \\

&p^2&: U\_2(x) = -L^{-1}( N(U\_0(x), U\_1(x))), **\label{m}** \\

&\vdots & \nonumber \\

&p^j&: U\_j(x) = -L^{-1}( N(U\_0(x), U\_1(x), U\_2(x) , . . . , U\_{j-1}(x) )),\nonumber \\

&\vdots & \nonumber

\end{eqnarray}

ถ้าแก้สมการเหล่านี้โดยให้ $U\_1(x) = 0 $ แล้วผลลัพธ์ของสมการ (\ref{m}) ทำให้ $U\_2(x) = U\_3(x) = \ldots = 0 $ ดังนั้นผลเฉลยที่ถูกต้องจะได้ดังนี้

\begin{eqnarray}

U\_0(x) &=& L^{-1} \left(\sum\_{n=0}^{\infty}a\_nP\_n (x)\right), \nonumber \\

U\_1(x) &=& L^{-1}(f(r(x)) - L^{-1} \left( \sum\_{n=0}^{\infty}a\_nP\_n (x)\right)-L^{-1}N(U\_0(x))), \nonumber \\

&=& 0 \nonumber \\

U\_2(x) &=& -L^{-1}( N(U\_0(x), 0),\nonumber \\

&=& 0 \nonumber \\

&\vdots & \nonumber \\

&=& 0 \nonumber \\

u(x) = U\_0(x) &=& L^{-1} \left(\sum\_{n=0}^{\infty}a\_nP\_n (x) \right), \nonumber

\end{eqnarray}

เป็นประโยชน์มากถ้าจะกล่าวถึง ถ้า $f(r(x))$ และ $u\_0(x)$ มีการวิเคราะห์ที่ $x = x\_0,$ แล้วอนุกรมเทเลอร์ถูกกำหนดเป็น

\begin{equation}

u\_0(x) = \sum\_{n=0}^{\infty}a\_n(x -x\_0)^n, f(r(x)) = \sum\_{n=0}^{\infty}a\_n^ \ast (x - x\_0)^n , \nonumber

\end{equation}

สามารถใช้สมการ (\ref{l}), โดยที่ $a\_0^ \ast, a\_1^ \ast, a\_2^ \ast, ... $ เป็นสัมประสิทธิ์ที่ทราบค่า และ $a\_0, a\_1, a\_2, ... $ เป็นสัมประสิทธิ์ไม่ทราบค่าซึ่งจะต้องคำนวณ

เพื่อแสดงประสิทธิ์ภาพของวิธีการนี้ โดยใช้โฮโมโทพีเพอร์เทอร์เบชันรูปแบบใหม่กับตัวอย่างในส่วนถัดไป

**\subsection{ตัวอย่างประกอบ}**

\begin{example}

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ริคคาติกำลังสองดังต่อไปนี้

\begin{equation}

\frac{\operatorname{d}y(t) }{\operatorname{d}t} = 2y(t) - y^2(t) + 1,

\**label{n}**

\end{equation}

เงื่อนไขเริ่มต้น

\begin{equation}

y(0) = 0, \nonumber

\end{equation}

ผลเฉลยแท้จริงของสมการข้างต้นมีรูปแบบดังนี้

\begin{equation}

y(t) = 1 + \sqrt{2}\tanh \left[ \sqrt{2}t + \frac{1}{2}\log\left({\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\right],

\**label{o}**

\end{equation}

ซึ่งสามารถกระจายอนุกรมเทเลอร์ของ $y(t)$ ประมาณให้ $t = 0 $ จะได้

\begin{eqnarray}

y(t) = t + t^2 +\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}t^4 - \frac{7}{15}t^5 - \frac{7}{45}t^6 + \frac{53}{315}t^7 + \frac{568}{315}t^8 +\cdots ,\nonumber

\end{eqnarray}

หาผลเฉลยจากสมการ (\ref{n}) โดยใช้วิธีการโฮโมโทพีเพอร์เทอร์เบชันรูปแบบใหม่ สร้างตามรูปแบบของโฮโมโทพี

\begin{eqnarray}

(1 - p) [ Y^\prime(t) - y\_0(t)] + p[Y^\prime(t) - 2Y(t) +Y^2(t) - 1] = 0 ,\nonumber

\end{eqnarray}

หรือ

\begin{eqnarray}

Y^\prime(t) = y\_0(t) - p[y\_0(t) - 2Y(t) +Y^2(t) - 1] ,

**\label{p}**

\end{eqnarray}

ใช้ตัวดำเนินการผกผัน $L^{-1} = \int\limits\_{0}^{t}( \cdotp) d\xi $ ทั้งสองข้างของสมการข้างต้น \\

จาก

\begin{eqnarray}

Y^\prime(t) &=& y\_0(t) - p[y\_0(t) - 2Y(t) +Y^2(t) - 1], \nonumber \\

L^{-1}\left(Y^\prime(t)\right) & =& L^{-1} \left( y\_0(t) - p[y\_0(t) - 2Y(t) +Y^2(t) - 1]\right), \nonumber \\

\int\limits\_{0}^{t}Y^\prime(t) d\xi & =& \int\limits\_{0}^{t}y\_0(t) - p[y\_0(t) - 2Y(t) +Y^2(t) - 1] d\xi, \nonumber \\

Y(t) - Y(0) & =& \int\limits\_{0}^{t}y\_0(\xi) d\xi - p\left[\int\limits\_{0}^{t}[y\_0(\xi) - 2Y(\xi) +Y^2(\xi) - 1] d\xi \right],\nonumber

\end{eqnarray}

จะได้

\begin{eqnarray}

Y(t) = Y(0) + \int\limits\_{0}^{t}y\_0(\xi) d\xi - p\left[\int\limits\_{0}^{t}[y\_0(\xi) - 2Y(\xi) +Y^2(\xi) - 1] d\xi \right],

**\label{q}**

\end{eqnarray}

สมมติให้ผลเฉลยของสมการ (\ref{q}) มีรูปแบบดังนี้

\begin{equation}

Y(t) = Y\_0(t) + pY\_1(t) + p^2Y\_2(t) + \cdots ,

\**label{r}**

\end{equation}

โดยที่ $Y\_i(t)$ เป็นฟังก์ชันที่ไม่ทราบที่จะพิจารณา\\

\indent แทนสมการ (\ref{r}) ลงในสมการ (\ref{q}) รวมพจน์ที่มีกำลังเหมือนกันของ $p$ และทำให้แต่ละค่าสัมประสิทธิ์ของ $p$ ไปถึง $0$ จะได้

\begin{eqnarray}

&p^0&: Y\_0(t) = Y(0) + \int\limits\_{0}^{t}y\_0(\xi) d\xi, \nonumber \\

&p^1&: Y\_1(t) = \int\limits\_{0}^{t}[-y\_0(\xi) + 2Y\_0(\xi) -Y\_0^2(\xi) + 1] d\xi, **\label{s}** \\

&p^j&: Y\_j(t) = \int\limits\_{0}^{t}\left[ 2Y\_{2, j-1}(\xi) - \sum\_{k=0}^{j -1}Y\_{2 , k}(\xi)Y\_{2 ,j - k - 1}(\xi)\right]d\xi, \indent j = 2, 3, 4, ... \nonumber

\end{eqnarray}

สมมติให้ $y\_0(t) = \sum\_{n=0}^{\infty}a\_nP\_n(t), P\_k(t) = t^k, Y(0) = y(0), $ และแก้สมการข้างต้นสำหรับ $ Y\_1(t)$ เพื่อให้ได้ผลเฉลย\\

จาก

\begin{eqnarray}

Y\_0(t) &=& Y(0) + \int\limits\_{0}^{t}y\_0(\xi) d\xi, \nonumber \\

&=& 0 + \int\limits\_{0}^{t}\sum\_{n=0}^{\infty}a\_nP\_n(\xi) d\xi, \nonumber \\

&=& \int\limits\_{0}^{t}a\_0P\_0(\xi) + a\_1P\_1(\xi) + a\_2P\_2(\xi) + a\_3P\_3(\xi) + a\_4P\_4(\xi) + a\_5P\_5(\xi) + a\_6P\_6(\xi) + \cdots d\xi, \nonumber \\

&=& \int\limits\_{0}^{t}a\_0+ a\_1\xi + a\_2\xi ^2 + a\_3\xi ^3 + a\_4\xi ^4 + a\_5\xi ^5 + a\_6\xi ^6 + \cdots d\xi, \nonumber \\

&=& a\_0t +\frac{1}{2} a\_1t ^2 +\frac{1}{3} a\_2t ^3 +\frac{1}{4} a\_3t ^4 +\frac{1}{5} a\_4t ^5 +\frac{1}{6} a\_5t^6 +\frac{1}{7} a\_6t^7 + \cdots,\nonumber \\

Y\_1(t) &=& \int\limits\_{0}^{t}[-y\_0(\xi) + 2Y\_0(\xi) -Y\_0^2(\xi) + 1] d\xi, \nonumber \\

&=& \int\limits\_{0}^{t}\left[ - \sum\_{n=0}^{\infty}a\_nP\_n(\xi) + 2Y\_0(\xi) -Y\_0^2(\xi) + 1\right] d\xi, \nonumber \\

&=&(1-a\_0)t + \left( a\_0 - \frac{1}{2}a\_1 \right)t^2 + \left(\frac{1}{3}a\_1 - \frac{1}{3}a\_2 - \frac{1}{3}a\_0^2 \right)t^3 + \left(\frac{1}{6}a\_2 - \frac{1}{4}a\_3 - \frac{1}{4}a\_0a\_1 \right)t^4 \nonumber \\

&+& \left(\frac{1}{10}a\_3 - \frac{1}{20}a\_1^2 - \frac{1}{5}a\_4- \frac{2}{15}a\_0a\_2 \right)t^5 + \left(\frac{1}{15}a\_4 - \frac{1}{6}a\_5 - \frac{1}{12}a\_0a\_3 - \frac{1}{18}a\_2a\_1 \right)t^6 \nonumber \\

&+& \left(\frac{1}{21}a\_5 - \frac{2}{35}a\_0a\_4 - \frac{1}{7}a\_6 - \frac{1}{63}a\_2^2- \frac{1}{28}a\_1a\_3 \right)t^7 + \cdots \nonumber

\end{eqnarray}

$Y\_1(t)$ ที่หายไปทำให้ได้ค่าสัมประสิทธิ์ $a\_n(n = 1, 2, 3, ... )$ ดังต่อไปนี้ \\

\indent พิจารณาพจน์ที่ $t$ ให้

\begin{eqnarray}

1-a\_0 &=& 0 \nonumber \\

a\_0 &=& 1\nonumber

\end{eqnarray}

\indent พิจารณาพจน์ที่ $t^2$ ให้

\begin{eqnarray}

a\_0 - \frac{1}{2}a\_1 &=& 0 \nonumber \\

a\_1 &=& 2\nonumber

\end{eqnarray}

\indent พิจารณาพจน์ที่ $t^3$ ให้

\begin{eqnarray}

\frac{1}{3}a\_1 - \frac{1}{3}a\_2 - \frac{1}{3}a\_0^2 &=& 0 \nonumber \\

a\_2 &=& 1\nonumber

\end{eqnarray}

\indent พิจารณาพจน์ที่ $t^4$ ให้

\begin{eqnarray}

\frac{1}{6}a\_2 - \frac{1}{4}a\_3 - \frac{1}{4}a\_0a\_1 &=& 0 \nonumber \\

a\_3 &=& -\frac{4}{3} \nonumber

\end{eqnarray}

\indent พิจารณาพจน์ที่ $t^5$ ให้

\begin{eqnarray}

\frac{1}{10}a\_3 - \frac{1}{20}a\_1^2 - \frac{1}{5}a\_4- \frac{2}{15}a\_0a\_2 &=& 0 \nonumber \\

a\_4 &=& -\frac{7}{3} \nonumber

\end{eqnarray}

\indent พิจารณาพจน์ที่ $t^6$ ให้

\begin{eqnarray}

\frac{1}{15}a\_4 - \frac{1}{6}a\_5 - \frac{1}{12}a\_0a\_3 - \frac{1}{18}a\_1a\_2 &=& 0 \nonumber \\

a\_5 &=& -\frac{14}{15} \nonumber

\end{eqnarray}

\indent พิจารณาพจน์ที่ $t^7$ ให้

\begin{eqnarray}

\frac{1}{21}a\_5 - \frac{2}{35}a\_0a\_4 - \frac{1}{7}a\_6 - \frac{1}{63}a\_2^2- \frac{1}{28}a\_1a\_3 &=& 0 \nonumber \\

a\_6 &=& \frac{53}{45} \nonumber

\end{eqnarray}

\indent ดังนั้น

\begin{eqnarray}

a\_0 = 1,\indent a\_1 = 2,\indent a\_2 = 1,\indent a\_3 = - \frac{4}{3},\indent a\_4 = -\frac{7}{3},\indent a\_5 = -\frac{14}{15},\indent a\_6 = \frac{53}{45},\indent a\_7 = \frac{568}{315}, \cdots, \nonumber

\end{eqnarray}

ดังนั้น ได้ผลเฉลยจากสมการ (\ref{n}) คือ

\begin{eqnarray}

y(t) = Y\_0(t)&=& a\_0t + \frac{a\_1}{2}t^2 + \frac{a\_2}{3}t^3 +\frac{a\_3}{4}t^4 + \frac{a\_4}{5}t^5 + \frac{a\_5}{6}t^6 + \cdots \nonumber \\

&=& t + t^2 + \frac{1}{3}t^3 -\frac{1}{3}t^4 - \frac{7}{15}t^5 - \frac{7}{45}t^6 + \frac{53}{315}t^7 + \cdots, \nonumber

\end{eqnarray}

และข้อจำกัดสำหรับอนันต์พจน์นี้ จะได้ผลเฉลยที่แท้จริงดังสมการ (\ref{o})\\

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ริคคาติกำลังสองดังต่อไปนี้

\begin{equation}

\frac{\operatorname{d}y(t) }{\operatorname{d}t} = - y(t) + y^2(t) ,

\**label{t}**

\end{equation}

เงื่อนไขเริ่มต้น

\begin{equation}

y(0) = \frac{1}{2}, \nonumber

\end{equation}

ผลเฉลยแท้จริงของสมการข้างต้นมีรูปแบบดังนี้

\begin{equation}

y(t) =\frac{e^{-t}}{1+e^{-t}},

\**label{u}**

\end{equation}

ซึ่งสามารถกระจายอนุกรมเทเลอร์ของ $y(t)$ ประมาณให้ $t = 0 $ จะได้

\begin{eqnarray}

y(t) = \frac{1}{2} -\frac{1}{4}t +\frac{1}{48}t^3 - \frac{1}{480}t^5 + \frac{17}{80640}t^7 - \frac{31}{1451520}t^9 + \frac{691}{319334400}t^{11} -\cdots ,\nonumber

\end{eqnarray}

หาผลเฉลยจากสมการ (\ref{t}) โดยใช้วิธีการโฮโมโทพีเพอร์เทอร์เบชันรูปแบบใหม่ สร้างตามรูปแบบของโฮโมโทพี

\begin{eqnarray}

Y^\prime(t) = y\_0(t) - p[y\_0(t) + Y(t) - Y^2(t) ] ,

**\label{v}**

\end{eqnarray}

ใช้ตัวดำเนินการผกผัน $L^{-1} = \int\limits\_{0}^{\chi}( \cdotp) d\xi $ ทั้งสองข้างของสมการข้างต้น \\

จะได้

\begin{eqnarray}

Y(\chi ) = Y(0) + \int\limits\_{0}^{\chi }y\_0(\xi) d\xi - p\left[\int\limits\_{0}^{\chi }[y\_0(\xi) + Y(\xi) - Y^2(\xi) ] d\xi \right],

**\label{w}**

\end{eqnarray}

สมมติให้ผลเฉลยของสมการ (\ref{w}) มีรูปแบบดังสมการ (\ref{r}) แทนสมการ (\ref{r}) ในสมการ(\ref{w}) รวมพจน์ที่มีกำลังเหมือนกันของ $p$ และให้แต่ละค่าสัมประสิทธิ์ของ $p$ มีค่าเป็น $0$ จะได้

\begin{eqnarray}

&p^0&: Y\_0(t) = Y(0) + \int\limits\_{0}^{t}y\_0(\xi) d\xi , \nonumber \\

&p^1&: Y\_1(t) = \int\limits\_{0}^{t}[-y\_0(\xi) - Y\_0(\xi) + Y\_0^2(\xi) ] d\xi, \nonumber \\

&p^j&: Y\_j(t) = \int\limits\_{0}^{t}\left[ -Y\_{j-1}(\xi) + \sum\_{k=0}^{j -1}Y\_{2 , k}(\xi)Y\_{2 ,j - k - 1}(\xi)\right]d\xi, \indent j = 2, 3, 4, ... \nonumber

\end{eqnarray}

สมมติให้ $y\_0(t) = \sum\_{n=0}^{\infty}a\_nt^n ,Y(0) = \frac{1}{2}, $ และ $ Y\_1(t) = 0 $ จะได้\\

จาก

\begin{eqnarray}

Y\_0(t) &=& Y(0) + \int\limits\_{0}^{t}y\_0(\xi) d\xi, \nonumber \\

&=&\frac{1}{2} + \int\limits\_{0}^{t}\sum\_{n=0}^{\infty}a\_n\xi ^n d\xi, \nonumber \\

&=& \frac{1}{2} + \int\limits\_{0}^{t}a\_0 + a\_1\xi + a\_2\xi ^2 + a\_3\xi ^3 + a\_4\xi ^4 + a\_5\xi ^5 + a\_6\xi ^6 + \cdots d\xi, \nonumber \\

&=& \frac{1}{2} + \left( a\_0t+\frac{1}{2} a\_1t ^2 +\frac{1}{3} a\_2t ^3 +\frac{1}{4} a\_3t ^4 +\frac{1}{5} a\_4t ^5 +\frac{1}{6} a\_5t^6 +\frac{1}{7} a\_6t^7 + \cdots \right),\nonumber \\

Y\_1(t) &=& \int\limits\_{0}^{t}[-y\_0(\xi) - Y\_0(\xi) +Y\_0^2(\xi)] d\xi, \nonumber \\

&=& \int\limits\_{0}^{t}\left[ - \sum\_{n=0}^{\infty}a\_n\xi ^n - Y\_0(\xi) + Y\_0^2(\xi) \right] d\xi, \nonumber \\

&=& -\left( \frac{1}{4} + a\_0 \right)t - \frac{1}{2}a\_1t^2 + \left(\frac{1}{3}a\_0^2 - \frac{1}{3}a\_2 \right)t^3 + \left(\frac{1}{4}a\_0a\_1 - \frac{1}{4}a\_3 \right)t^4 \nonumber \\

&+& \left( \frac{1}{20}a\_1^2 + \frac{2}{15}a\_0a\_2 - \frac{1}{5}a\_4 \right)t^5 + \left(\frac{1}{15}a\_4 - \frac{1}{6}a\_5 - \frac{1}{12}a\_0a\_3 - \frac{1}{18}a\_2a\_1 \right)t^6 \nonumber \\

&+& \left(\frac{1}{21}a\_5 - \frac{2}{35}a\_0a\_4 - \frac{1}{7}a\_6 - \frac{1}{63}a\_2^2- \frac{1}{28}a\_1a\_3 \right)t^7 + \cdots \nonumber

\end{eqnarray}

$Y\_1(t)$ ที่หายไปทำให้ได้ค่าสัมประสิทธิ์ $a\_n(n = 1, 2, 3, ... )$ ดังต่อไปนี้\\

\indent พิจารณาพจน์ที่ $t$ ให้

\begin{eqnarray}

-\left(\frac{1}{4} + a\_0\right) &=& 0 \nonumber \\

a\_0 &=& -\frac{1}{4}\nonumber

\end{eqnarray}

\indent พิจารณาพจน์ที่ $t^2$ ให้

\begin{eqnarray}

- \frac{1}{2}a\_1 &=& 0 \nonumber \\

a\_1 &=& 0\nonumber

\end{eqnarray}

\indent พิจารณาพจน์ที่ $t^3$ ให้

\begin{eqnarray}

\frac{1}{3}a\_0^2- \frac{1}{3}a\_2 &=& 0 \nonumber \\

a\_2 &=& \frac{1}{16}\nonumber

\end{eqnarray}

\indent พิจารณาพจน์ที่ $t^4$ ให้

\begin{eqnarray}

\frac{1}{4}a\_0a\_1 - \frac{1}{4}a\_3 &=& 0 \nonumber \\

a\_3 &=& 0 \nonumber

\end{eqnarray}

\indent พิจารณาพจน์ที่ $t^5$ ให้

\begin{eqnarray}

\frac{1}{20}a\_1^2 + \frac{2}{15}a\_0a\_2 - \frac{1}{5}a\_4 &=& 0 \nonumber \\

a\_4 &=& -\frac{1}{96} \nonumber

\end{eqnarray}

\indent พิจารณาพจน์ที่ $t^6$ ให้

\begin{eqnarray}

\frac{1}{12}a\_0a\_3 + \frac{1}{18}a\_1a\_2 - \frac{1}{6}a\_5 &=& 0 \nonumber \\

a\_5 &=& 0\nonumber

\end{eqnarray}

\indent พิจารณาพจน์ที่ $t^7$ ให้

\begin{eqnarray}

\frac{2}{35}a\_0a\_4 + \frac{1}{28}a\_1a\_3 - \frac{1}{7}a\_6 - \frac{1}{63}a\_2^2 &=& 0 \nonumber \\

a\_6 &=& \frac{17}{11520} \nonumber

\end{eqnarray}

\indent ดังนั้น

\begin{eqnarray}

a\_0 = -\frac{1}{4},\indent a\_1 = 0,\indent a\_2 = \frac{1}{16},\indent a\_3 = 0,\indent a\_4 = -\frac{1}{96},\indent a\_5 = 0,\indent a\_6 = \frac{17}{11520},\indent a\_7 = 0, \cdots, \nonumber

\end{eqnarray}

ดังนั้น ได้ผลเฉลยจากสมการ (\ref{n}) คือ

\begin{eqnarray}

y(t) = Y\_0(t)&=& 1 + a\_0t + \frac{a\_1}{2}t^2 + \frac{a\_2}{3}t^3 +\frac{a\_3}{4}t^4 + \frac{a\_4}{5}t^5 + \frac{a\_5}{6}t^6 + \cdots \nonumber \\

&=& \frac{1}{2} -\frac{1}{4}t + \frac{1}{48}t^3 - \frac{1}{480}t^5 + \frac{17}{80640}t^7 + \cdots, \nonumber

\end{eqnarray}

และข้อจำกัดสำหรับอนันต์พจน์นี้ จะได้ผลเฉลยที่แท้จริงดังสมการ (\ref{o})

\end{example}

**\subsection{สรุปผล}**

~~~~~ โฮโมโทพีเพอร์เทอร์เบชันรูปแบบใหม่ (NHPM) วิธีการโฮโมโทพีเพอร์เทอร์เบชันรูปแบบใหม่ (NHPM) สามารถหาผลเฉลยได้ สรุปได้ว่า สำหรับการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ริคคาติที่เป็นที่รู้จักกันดี เมื่อใช้วิธีการนี้เราจะได้ผลเฉลยที่ถูกต้องสำหรับสมการริคคาติ \\

\indent ส่วนในวิธีการแยกอโดเมียน (ADM), วิธีการโฮโมโทพีเพอร์เทอร์เบชัน (HPM), วิธีการวิเคราะห์แบบโฮโมโทพี (HAM) และ วิธีทำซ้ำแปรผัน (VIM) เราจะได้เซตของสมการเชิงอนุพันธ์ที่เกิดซ้ำ ซึ่งจะต้องแก้ปัญหาอย่างต่อเนื่องเพื่อให้ได้ผลเฉลยโดยประมาณ บางครั้งเราต้องคำนวณหลายอย่างในอนุกรม เพื่อให้ได้อนุกรมของการประมาณค่าที่สูงขึ้นด้วยความถูกต้องและยอมรับได้ แต่อย่างที่เห็นในวิธีการโฮโมโทพีเพอร์เทอร์เบชันรูปแบบใหม่ (NHPM) เราได้ใช้จากการประมาณค่าของผลเฉลยครั้งที่หนึ่งของ $Y\_1(t)$ เพื่อให้ได้ผลเฉลยที่แท้จริงของปัญหา การคํานวณโดยทั่วไปจะได้เซตของสมการไม่เชิงเส้นที่ไม่ทราบค่าในแต่ละสมการ เซตนี้สามารถแก้ปัญหาได้อย่างง่ายดายโดยใช้เมเปิลและนำค่าเหล่านี้ไปใช้ในการประมาณค่าของผลเฉลยครั้งที่หนึ่งเพื่อให้ได้ผลเฉลยที่แท้จริง

\begin{thebibliography}{99}

\bibitem{ตัวอย่างหนังสือ}

ชื่อผู้แต่ง.

(ปีที่พิมพ์).

\emph{ชื่อหนังสือ.} (ครั้งที่พิมพ์-ถ้ามี).

เมืองที่พิมพ์: สำนักพิมพ์.

\bibitem{ตัวอย่างหนังสือ}

(2553).

\emph{พจนานุกรมศัพท์ทางคณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน.} (10).

กรุงเทพมหานคร: นานมีบุ๊คส์พันลิเคชั่นส์.

\bibitem{ตัวอย่างวารสาร}

ชื่อผู้แต่ง.

(ปีที่พิมพ์).

ชื่อเรื่อง.

\emph{ชื่อวารสาร}, ปีที่(ฉบับที่),

หน้าแรก--หน้าสุดท้าย.

เมืองที่พิมพ์: สำนักพิมพ์.

\end{thebibliography}

\end{document}