

## วิธีที่มีประสิทธิภาพสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์รีคาติกำลังสอง

## An Efficient Method

## for Quadratic Riccati Differential Equation

แหล่งที่มา: Hossein Aminikhah & Milad Hemmatnezhad (2010), *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(3), 123–145

จัดทำโดย: นางสาวสุดสว ยรรยง

## บทคัดย่อ

ในบทความนี้ได้มีการนำวิธีการโฮโมโทปีเพอร์เทอร์เบชันรูปแบบใหม่มาใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ของสมการรีคาติกำลังสอง ในวิธีการนี้จะต้องพิจารณาว่าการกระจายแบบอนุกรมเทเลอร์นี้ ลู่เข้าสู่ผลเฉลยที่แท้จริงของสมการไม่เชิงเส้น ซึ่งได้ผลเฉลยที่แท้จริงของสมการรีคาติที่มีประสิทธิภาพ และความเรียบง่ายสำหรับวิธีการที่นำเสนอจะทำให้เข้าใจง่ายขึ้น

## 1 บทนำ

ในช่วงไม่กี่ปีที่ผ่านมาความสนใจที่เพิ่มขึ้น ของนักวิทยาศาสตร์และวิศวกรได้สนใจเกี่ยวกับวิธีการวิเคราะห์เชิงเส้นสำหรับการแก้ปัญหาที่ไม่เป็นเชิงเส้น วิธีการเชิงตัวเลขแบบใหม่จำนวนมากได้ถูกนำมาประยุกต์ใช้กันอย่างกว้างขวางในปัญหาที่ไม่เป็นเชิงเส้น วิธีการวิเคราะห์โดยทั่วไปคือวิธีการวิเคราะห์แบบโฮโมโทปี (HAM) และวิธีการโฮโมโทปีเพอร์เทอร์เบชัน (HPM) ซึ่งก่อตั้งโดย เรียว ซี จุน (Liao Shijun.) ในปี ค.ศ.1992 ตามลำดับ ฮี (He JH.) ได้แก้ปัญหาเกี่ยวกับอนุกรมของสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น

เราได้แนะนำวิธีการโฮโมโทปีเพอร์เทอร์เบชัน (HPM) รูปแบบใหม่ที่สามารถแก้สมการเชิงอนุพันธ์รีคาติได้อย่างมีประสิทธิภาพ วิธีการโฮโมโทปีเพอร์เทอร์เบชัน (HPM) ของ ฮี (He JH.) ได้ถูกนำไปใช้โดยนักคณิตศาสตร์และวิศวกรหลายคนในการแก้ปัญหสมการต่าง ๆ ในวิธีการนี้ ปัญหาไม่เชิงเส้นจะถูกแปลงเป็นปัญหาย่อยที่มีจำนวนไม่สิ้นสุดและจากนั้นวิธีแก้ปัญหาก็จะถูกประมาณโดยผลรวมของการแก้ปัญหาย่อยสำหรับอันดับแรกของบางปัญหาย่อย

## 2 ความรู้พื้นฐาน

**บทนิยาม 1** ในทางคณิตศาสตร์จะกล่าวว่าเมทริกซ์จะเป็นเมทริกซ์ diagonally dominant ถ้าสมาชิก ทุกๆตัวในแถวของเมทริกซ์ในแนวทแยงมีค่าของผลรวมมากกว่าหรือเท่ากับ ผลรวมของสมาชิกตัว อื่นในแถวเดียวกัน (ที่ไม่ใช่สมาชิกในแนวทแยงมุม) สมาชิกในแถวนั้นอย่างแม่นยำมาก

ขึ้น เมทริกซ์  $A$  จะเป็นเมทริกซ์ diagonally dominant ถ้า

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

เมื่อ  $a_{ij}$  หมายถึงสมาชิกแถวที่  $i$  หลักที่  $j$

ยกตัวอย่างเช่น

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

เป็นเมทริกซ์ diagonally dominant เพราะว่า

$$|a_{11}| \geq |a_{12}| + |a_{13}|$$

$$|a_{22}| \geq |a_{21}| + |a_{23}|$$

$$|a_{33}| \geq |a_{31}| + |a_{32}|$$

นั่นคือ

$$|+3| \geq |-2| + |+1| = 3$$

$$|-3| \geq |+1| + |+2| = 3$$

$$|+4| \geq |-1| + |+2| = 3$$

**บทนิยาม 2** นอร์มของเมทริกซ์ (Norm of matrix)

$$\|A\| = \max \left( \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \text{ เมื่อ } 1 \leq j \leq n$$

$$\|A\|_{\infty} = \max \left( \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \text{ เมื่อ } 1 \leq i \leq n$$

ตัวอย่าง  $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\|A\| = \max(|5| + |-1| + |-2|, |-4| + |2| + |1|, |2| + |3| + |0|)$$

$$= \max(5 + 1 + 2, 4 + 2 + 1, 2 + 3 + 0)$$

$$= \max(8, 7, 5)$$

$$= 8$$

$$\|A\|_{\infty} = \max(|5| + |-4| + |2|, |-1| + |2| + |3|, |-2| + |1| + |0|)$$

$$= \max(5 + 4 + 2, 1 + 2 + 3, 2 + 1 + 0)$$

$$= \max(11, 6, 3)$$

$$= 11$$

**ทฤษฎีบท 3** ถ้าเมทริกซ์  $A$  เป็นเมทริกซ์ diagonally dominant และ  $B = [b_{ij}]$  โดยที่

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i = j \\ \frac{a_{ij}}{a_{ii}} & ; i \neq j \end{cases}$$

แล้ว  $\|B - I\|_{\infty} < 1$

**ทฤษฎีบท 4** ให้  $A$  เป็นเมทริกซ์ใดๆ

$$\text{ถ้า } \|A - I\| < 1 \quad \text{แล้วลำดับ} \quad u^{[m]} = \left[ \sum_{k=0}^m (A - I)^k \right] b \quad \text{จะเป็นลำดับโคชี}$$

$$\text{หมายเหตุ นั่นคือ} \quad u^{[m]} = \left[ \sum_{k=0}^m (A - I)^k \right] b \quad \text{เป็นลำดับลู่เข้า}$$

**บทนิยาม 5** เมทริกซ์แต่งเติม (Augmented Matrix) เมทริกซ์ที่เกิดจากการรวมกันของเมทริกซ์อื่นสองเมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากัน

**ทฤษฎีบท 6** ให้  $AX = B$  และ  $CX = D$  เป็นระบบสมการเชิงเส้น 2 ระบบที่มี  $m$  สมการและ  $n$  ตัวแปร ถ้าเมทริกซ์แต่งเติม  $[A : B]$  สมมูลตามแถวกับเมทริกซ์  $[C : D]$  จะได้ว่า ระบบสมการเชิงเส้นทั้งสองมีผลเฉลยเดียวกัน

เช่น ระบบสมการ

$$x + 3y = 1$$

$$2x + y = 2$$

จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

เขียนในรูปเมทริกซ์แต่งเติมได้

$$A = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

**บทนิยาม 7** อิสระเชิงเส้น ให้  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  เป็นสับเซต ที่ไม่ว่าง ของปริภูมิเวกเตอร์  $V$  จะกล่าวว่า  $S$  เป็นอิสระเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อ มีสมบัติว่า ถ้า  $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = \vec{0}$  แล้ว  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$

ยกตัวอย่างเช่น

ให้  $S = \{v_1, v_2\}$  โดยที่  $v_1 = [1 \ 0], v_2 = [0 \ 1]$  จงพิจารณาว่า  $S$  เป็นอิสระเชิงเส้นใน  $\mathbb{R}^2$  หรือไม่  
วิธีทำ สมมติให้  $av_1 + bv_2 = \vec{0}$

$$\text{แสดงว่า } a[1 \ 0] + b[0 \ 1] = [0 \ 0]$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า

$$a = 0 \text{ และ } b = 0$$

ดังนั้น  $S = \{v_1, v_2\}$  เป็นอิสระเชิงเส้น

### 3 เนื้อหา

#### 3.1 แนวคิดพื้นฐานสำหรับโฮโมโทปีเพอร์เทอร์เบชันรูปแบบใหม่

เพื่ออธิบายแนวคิดพื้นฐานของวิธีการนี้ เพื่อพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นดังนี้

$$A(u(x)) - f(r(x)) = 0, \quad r(x) \in \Omega \quad (3.1)$$

ที่มีเงื่อนไขขอบเขตดังต่อไปนี้

$$B(u(x), \frac{\partial u(x)}{\partial n}) = 0, \quad r(x) \in \Gamma \quad (3.2)$$

โดยที่  $A$  คือตัวดำเนินการทั่วไป,  $B$  คือตัวดำเนินการขอบเขต,  $f(r(x))$  คือฟังก์ชันวิเคราะห์ และ  $\Gamma$  คือขอบเขตของโดเมน  $\Omega$

ตัวดำเนินการ  $A$  สามารถแบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ  $L, N$  โดยที่  $L$  คือตัวดำเนินการเชิงเส้น และ  $N$  คือตัวดำเนินการไม่เชิงเส้น

ดังนั้น สมการ (3.1) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$L(u(x)) + N(u(x)) - f(r(x)) = 0 \quad (3.3)$$

โดยจะใช้เทคนิคโฮโมโทปี สร้างสมการโฮโมโทปี  $U(r(x), p): \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ที่

$$H(U(x), 0) = (1 - p)[L(U(x)) - L(u_0(x))] + p[A(U(x)) - f(r(x))] = 0, \quad (3.4)$$

$$\text{โดยที่ } p \in [0, 1], \quad r(x) \in \Omega$$

หรือ

$$H(U(x), 0) = L(U(x)) - L(u_0(x)) + pL(u_0(x)) + p[N(U(x)) - f(r(x))] = 0, \quad (3.5)$$

ที่  $p \in [0, 1]$  เป็นตัวแปรเฉพาะ,  $u_0(x)$  เป็นค่าเริ่มต้นของการแก้สมการ (3.1)

จากสมการ (3.4) และ (3.5) จะได้

$$H(U(x), 0) = L(U(x)) - L(u_0(x)) = 0, \quad (3.6)$$

$$H(U(x), 1) = A(U(x)) - f(r(x)) = 0, \quad (3.7)$$

ซึ่งสอดคล้องกับวิธีการโฮโมโทปีเพอร์เทอร์เบชัน ให้พารามิเตอร์ฝั่งตัว  $p$  เป็นพารามิเตอร์ขนาดเล็ก และ สมมติให้ผลเฉลยของสมการ (3.4), (3.5) ที่สามารถแสดงเป็นอนุกรมกำลังของ  $p$  จะได้

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n U_n \quad (3.8)$$

เขียนสมการ (3.5) ในรูปแบบดังต่อไปนี้

จากสมการ (3.5)

$$\begin{aligned} H(U(x), 0) &= L(U(x)) - L(u_0(x)) + pL(u_0(x)) + p[N(U(x)) - f(r(x))] = 0, \\ L(U(x)) &= u_0(x) + p[f(r(x) - u_0(x) - N(U(x)))] \end{aligned} \quad (3.9)$$

ใช้ตัวดำเนินการผกผัน  $L^{-1}$  ไปยังสองข้างของสมการ (3.9)

จาก

$$\begin{aligned} L(U(x)) &= u_0(x) + p[f(r(x) - u_0(x) - N(U(x)))] , \\ L^{-1}(L(U(x))) &= L^{-1}(u_0(x) + p[f(r(x) - u_0(x) - N(U(x)))] , \end{aligned}$$

จะได้

$$U(x) = L^{-1}(u_0(x)) + p[L^{-1}(f(r(x)) - L^{-1}(u_0(x)) - L^{-1}(N(U(x))))] \quad (3.10)$$

สมมติให้ค่าประมาณเริ่มต้นของสมการ (3.1) มีรูปแบบดังนี้

$$u_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \quad (3.11)$$

โดยที่  $a_0, a_1, a_2, \dots$  เป็นสัมประสิทธิ์ไม่ทราบค่า และ  $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots$  เป็นฟังก์ชันเฉพาะที่ขึ้นอยู่กับปัญหา

แทนสมการ (3.8) และ (3.11) ลงในสมการ (3.10) จะได้

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} p^n U_n &= L^{-1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \right) + p \left[ L^{-1}(f(r(x)) - L^{-1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \right) \right. \\ &\quad \left. - L^{-1}(N \left( \sum_{n=0}^{\infty} p^n U_n(x) \right)) \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

เปรียบเทียบกับสัมประสิทธิ์ของขอบเขตที่มีกำลังเหมือนกันของ  $p$  จะได้

$$\begin{aligned} p^0 : U_0(x) &= L^{-1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \right) , \\ p^1 : U_1(x) &= L^{-1}(f(r(x)) - L^{-1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \right) - L^{-1}N(U_0(x))), \\ p^2 : U_2(x) &= -L^{-1}(N(U_0(x), U_1(x))), \\ &\vdots \\ p^j : U_j(x) &= -L^{-1}(N(U_0(x), U_1(x), U_2(x), \dots, U_{j-1}(x))), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.13)$$

ถ้าแก้สมการเหล่านี้โดยให้  $U_1(x) = 0$  แล้วผลลัพธ์ของสมการ (3.13) ทำให้  $U_2(x) = U_3(x) = \dots = 0$  ดังนั้นผลเฉลยที่ถูกต้องจะได้ดังนี้

$$\begin{aligned} U_0(x) &= L^{-1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \right), \\ U_1(x) &= L^{-1}(f(r(x))) - L^{-1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \right) - L^{-1}N(U_0(x)), \\ &= 0 \\ U_2(x) &= -L^{-1}(N(U_0(x), 0)), \\ &= 0 \\ &\vdots \\ &= 0 \\ u(x) = U_0(x) &= L^{-1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \right), \end{aligned}$$

เป็นประโยชน์มากถ้าจะกล่าวถึง ถ้า  $f(r(x))$  และ  $u_0(x)$  มีการวิเคราะห์ที่  $x = x_0$ , แล้วอนุกรมเทเลอร์ถูกกำหนดเป็น

$$u_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad f(r(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* (x - x_0)^n,$$

สามารถใช้สมการ (3.12), โดยที่  $a_0^*, a_1^*, a_2^*, \dots$  เป็นสัมประสิทธิ์ที่ทราบค่า และ  $a_0, a_1, a_2, \dots$  เป็นสัมประสิทธิ์ไม่ทราบค่าซึ่งจะต้องคำนวณ เพื่อแสดงประสิทธิภาพของวิธีการนี้ โดยใช้โฮโมโทปีเพอร์เทอร์เบชันรูปแบบใหม่กับตัวอย่างในส่วนถัดไป

## 3.2 ตัวอย่างประกอบ

**ตัวอย่าง 8** พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์รีคาคติกำลังสองดังต่อไปนี้

$$\frac{dy(t)}{dt} = 2y(t) - y^2(t) + 1, \quad (3.14)$$

เงื่อนไขเริ่มต้น

$$y(0) = 0,$$

ผลเฉลยแท้จริงของสมการข้างต้นมีรูปแบบดังนี้

$$y(t) = 1 + \sqrt{2} \tanh \left[ \sqrt{2}t + \frac{1}{2} \log(\sqrt{2} - 1\sqrt{2} + 1) \right], \quad (3.15)$$

ซึ่งสามารถกระจายอนุกรมเทเลอร์ของ  $y(t)$  ประมาณให้  $t = 0$  จะได้

$$y(t) = t + t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}t^4 - \frac{7}{15}t^5 - \frac{7}{45}t^6 + \frac{53}{315}t^7 + \frac{568}{315}t^8 + \dots,$$

หาผลเฉลยจากสมการ (3.14) โดยใช้วิธีการโฮโมโทปีเพอร์เทอร์เบชันรูปแบบใหม่ สร้างตามรูปแบบของโฮโมโทปี

$$(1-p)[Y'(t) - y_0(t)] + p[Y'(t) - 2Y(t) + Y^2(t) - 1] = 0,$$

หรือ

$$Y'(t) = y_0(t) - p[y_0(t) - 2Y(t) + Y^2(t) - 1], \quad (3.16)$$

ใช้ตัวดำเนินการผกผัน  $L^{-1} = \int_0^t (\cdot) d\xi$  ทั้งสองข้างของสมการข้างต้น  
จาก

$$\begin{aligned} Y'(t) &= y_0(t) - p[y_0(t) - 2Y(t) + Y^2(t) - 1], \\ L^{-1}(Y'(t)) &= L^{-1}(y_0(t) - p[y_0(t) - 2Y(t) + Y^2(t) - 1]), \\ \int_0^t Y'(t) d\xi &= \int_0^t y_0(t) - p[y_0(t) - 2Y(t) + Y^2(t) - 1] d\xi, \\ Y(t) - Y(0) &= \int_0^t y_0(\xi) d\xi - p \left[ \int_0^t [y_0(\xi) - 2Y(\xi) + Y^2(\xi) - 1] d\xi \right], \end{aligned}$$

จะได้

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t y_0(\xi) d\xi - p \left[ \int_0^t [y_0(\xi) - 2Y(\xi) + Y^2(\xi) - 1] d\xi \right], \quad (3.17)$$

สมมติให้ผลเฉลยของสมการ (3.17) มีรูปแบบดังนี้

$$Y(t) = Y_0(t) + pY_1(t) + p^2Y_2(t) + \cdots, \quad (3.18)$$

โดยที่  $Y_i(t)$  เป็นฟังก์ชันที่ไม่ทราบที่จะพิจารณา

แทนสมการ (3.18) ลงในสมการ (3.17) รวมพจน์ที่มีกำลังเหมือนกันของ  $p$  และทำให้แต่ละค่าสัมประสิทธิ์ของ  $p$  ไปถึง 0 จะได้

$$\begin{aligned} p^0 : Y_0(t) &= Y(0) + \int_0^t y_0(\xi) d\xi, \\ p^1 : Y_1(t) &= \int_0^t [-y_0(\xi) + 2Y_0(\xi) - Y_0^2(\xi) + 1] d\xi, \\ p^j : Y_j(t) &= \int_0^t \left[ 2Y_{j-1}(\xi) - \sum_{k=0}^{j-1} Y_{2,k}(\xi)Y_{2,j-k-1}(\xi) \right] d\xi, \quad j = 2, 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (3.19)$$

สมมติให้  $y_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(t)$ ,  $P_k(t) = t^k$ ,  $Y(0) = y(0)$ , และแก้สมการข้างต้นสำหรับ  $Y_1(t)$  เพื่อให้ได้ผลเฉลย

จาก

$$\begin{aligned}
 Y_0(t) &= Y(0) + \int_0^t y_0(\xi) d\xi, \\
 &= 0 + \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\xi) d\xi, \\
 &= \int_0^t a_0 P_0(\xi) + a_1 P_1(\xi) + a_2 P_2(\xi) + a_3 P_3(\xi) + a_4 P_4(\xi) + a_5 P_5(\xi) + a_6 P_6(\xi) + \cdots d\xi, \\
 &= \int_0^t a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + a_4 \xi^4 + a_5 \xi^5 + a_6 \xi^6 + \cdots d\xi, \\
 &= a_0 t + \frac{1}{2} a_1 t^2 + \frac{1}{3} a_2 t^3 + \frac{1}{4} a_3 t^4 + \frac{1}{5} a_4 t^5 + \frac{1}{6} a_5 t^6 + \frac{1}{7} a_6 t^7 + \cdots, \\
 Y_1(t) &= \int_0^t [-y_0(\xi) + 2Y_0(\xi) - Y_0^2(\xi) + 1] d\xi, \\
 &= \int_0^t \left[ -\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\xi) + 2Y_0(\xi) - Y_0^2(\xi) + 1 \right] d\xi, \\
 &= (1 - a_0)t + \left(a_0 - \frac{1}{2}a_1\right)t^2 + \left(\frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{3}a_2 - \frac{1}{3}a_0^2\right)t^3 + \left(\frac{1}{6}a_2 - \frac{1}{4}a_3 - \frac{1}{4}a_0a_1\right)t^4 \\
 &\quad + \left(\frac{1}{10}a_3 - \frac{1}{20}a_1^2 - \frac{1}{5}a_4 - \frac{2}{15}a_0a_2\right)t^5 + \left(\frac{1}{15}a_4 - \frac{1}{6}a_5 - \frac{1}{12}a_0a_3 - \frac{1}{18}a_2a_1\right)t^6 \\
 &\quad + \left(\frac{1}{21}a_5 - \frac{2}{35}a_0a_4 - \frac{1}{7}a_6 - \frac{1}{63}a_2^2 - \frac{1}{28}a_1a_3\right)t^7 + \cdots
 \end{aligned}$$

$Y_1(t)$  ที่หายไปทำให้ได้ค่าสัมประสิทธิ์  $a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$  ดังต่อไปนี้

พิจารณาพจน์ที่  $t$  ให้

$$1 - a_0 = 0$$

$$a_0 = 1$$

พิจารณาพจน์ที่  $t^2$  ให้

$$a_0 - \frac{1}{2}a_1 = 0$$

$$a_1 = 2$$

พิจารณาพจน์ที่  $t^3$  ให้

$$\frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{3}a_2 - \frac{1}{3}a_0^2 = 0$$

$$a_2 = 1$$

พิจารณาพจน์ที่  $t^4$  ให้

$$\frac{1}{6}a_2 - \frac{1}{4}a_3 - \frac{1}{4}a_0a_1 = 0$$

$$a_3 = -\frac{4}{3}$$



พิจารณาพจน์ที่  $t^5$  ให้

$$\begin{aligned}\frac{1}{10}a_3 - \frac{1}{20}a_1^2 - \frac{1}{5}a_4 - \frac{2}{15}a_0a_2 &= 0 \\ a_4 &= -\frac{7}{3}\end{aligned}$$

พิจารณาพจน์ที่  $t^6$  ให้

$$\begin{aligned}\frac{1}{15}a_4 - \frac{1}{6}a_5 - \frac{1}{12}a_0a_3 - \frac{1}{18}a_1a_2 &= 0 \\ a_5 &= -\frac{14}{15}\end{aligned}$$

พิจารณาพจน์ที่  $t^7$  ให้

$$\begin{aligned}\frac{1}{21}a_5 - \frac{2}{35}a_0a_4 - \frac{1}{7}a_6 - \frac{1}{63}a_2^2 - \frac{1}{28}a_1a_3 &= 0 \\ a_6 &= \frac{53}{45}\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = -\frac{4}{3}, \quad a_4 = -\frac{7}{3}, \quad a_5 = -\frac{14}{15}, \quad a_6 = \frac{53}{45}, \quad a_7 = \frac{568}{315}, \dots,$$

ดังนั้น ได้ผลเฉลยจากสมการ (3.14) คือ

$$\begin{aligned}y(t) = Y_0(t) &= a_0t + \frac{a_1}{2}t^2 + \frac{a_2}{3}t^3 + \frac{a_3}{4}t^4 + \frac{a_4}{5}t^5 + \frac{a_5}{6}t^6 + \dots \\ &= t + t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}t^4 - \frac{7}{15}t^5 - \frac{7}{45}t^6 + \frac{53}{315}t^7 + \dots,\end{aligned}$$

และข้อจำกัดสำหรับอนันต์พจน์นี้ จะได้ผลเฉลยที่แท้จริงดังสมการ (3.15)

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์รีเคคติกาลังสองดังต่อไปนี้

$$\frac{dy(t)}{dt} = -y(t) + y^2(t), \quad (3.20)$$

เงื่อนไขเริ่มต้น

$$y(0) = \frac{1}{2},$$

ผลเฉลยแท้จริงของสมการข้างต้นมีรูปแบบดังนี้

$$y(t) = \frac{e^{-t}}{1 + e^{-t}}, \quad (3.21)$$

ซึ่งสามารถกระจายอนุกรมเทเลอร์ของ  $y(t)$  ประมาณให้  $t = 0$  จะได้

$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t + \frac{1}{48}t^3 - \frac{1}{480}t^5 + \frac{17}{80640}t^7 - \frac{31}{1451520}t^9 + \frac{691}{319334400}t^{11} - \dots,$$

หาผลเฉลยจากสมการ (3.20) โดยใช้วิธีการโฮโมโทปีเพอร์เทอร์เบชันรูปแบบใหม่ สร้างตามรูปแบบของโฮโมโทปี

$$Y'(t) = y_0(t) - p[y_0(t) + Y(t) - Y^2(t)], \quad (3.22)$$

ใช้ตัวดำเนินการผกผัน  $L^{-1} = \int_0^x (\cdot) d\xi$  ทั้งสองข้างของสมการข้างต้น  
จะได้

$$Y(x) = Y(0) + \int_0^x y_0(\xi) d\xi - p \left[ \int_0^x [y_0(\xi) + Y(\xi) - Y^2(\xi)] d\xi \right], \quad (3.23)$$

สมมติให้ผลเฉลยของสมการ (3.23) มีรูปแบบดังสมการ (3.18) แทนสมการ (3.18) ในสมการ(3.23) รวมพจน์ที่มีกำลังเหมือนกันของ  $p$  และให้แต่ละค่าสัมประสิทธิ์ของ  $p$  มีค่าเป็น 0 จะได้

$$\begin{aligned} p^0 : Y_0(t) &= Y(0) + \int_0^t y_0(\xi) d\xi, \\ p^1 : Y_1(t) &= \int_0^t [-y_0(\xi) - Y_0(\xi) + Y_0^2(\xi)] d\xi, \\ p^j : Y_j(t) &= \int_0^t \left[ -Y_{j-1}(\xi) + \sum_{k=0}^{j-1} Y_{2,k}(\xi) Y_{2,j-k-1}(\xi) \right] d\xi, \quad j = 2, 3, 4, \dots \end{aligned}$$

สมมติให้  $y_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ ,  $Y(0) = \frac{1}{2}$ , และ  $Y_1(t) = 0$  จะได้  
จาก

$$\begin{aligned} Y_0(t) &= Y(0) + \int_0^t y_0(\xi) d\xi, \\ &= \frac{1}{2} + \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n d\xi, \\ &= \frac{1}{2} + \int_0^t a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + a_4 \xi^4 + a_5 \xi^5 + a_6 \xi^6 + \dots d\xi, \\ &= \frac{1}{2} + \left( a_0 t + \frac{1}{2} a_1 t^2 + \frac{1}{3} a_2 t^3 + \frac{1}{4} a_3 t^4 + \frac{1}{5} a_4 t^5 + \frac{1}{6} a_5 t^6 + \frac{1}{7} a_6 t^7 + \dots \right), \\ Y_1(t) &= \int_0^t [-y_0(\xi) - Y_0(\xi) + Y_0^2(\xi)] d\xi, \\ &= \int_0^t \left[ -\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n - Y_0(\xi) + Y_0^2(\xi) \right] d\xi, \\ &= -\left( \frac{1}{4} + a_0 \right) t - \frac{1}{2} a_1 t^2 + \left( \frac{1}{3} a_0^2 - \frac{1}{3} a_2 \right) t^3 + \left( \frac{1}{4} a_0 a_1 - \frac{1}{4} a_3 \right) t^4 \\ &+ \left( \frac{1}{20} a_1^2 + \frac{2}{15} a_0 a_2 - \frac{1}{5} a_4 \right) t^5 + \left( \frac{1}{15} a_4 - \frac{1}{6} a_5 - \frac{1}{12} a_0 a_3 - \frac{1}{18} a_2 a_1 \right) t^6 \\ &+ \left( \frac{1}{21} a_5 - \frac{2}{35} a_0 a_4 - \frac{1}{7} a_6 - \frac{1}{63} a_2^2 - \frac{1}{28} a_1 a_3 \right) t^7 + \dots \end{aligned}$$

$Y_1(t)$  ที่หายไปทำให้ได้ค่าสัมประสิทธิ์  $a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$  ดังต่อไปนี้  
พิจารณาพจน์ที่  $t$  ให้

$$\begin{aligned} -\left(\frac{1}{4} + a_0\right) &= 0 \\ a_0 &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

พิจารณาพจน์ที่  $t^2$  ให้

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}a_1 &= 0 \\ a_1 &= 0 \end{aligned}$$

พิจารณาพจน์ที่  $t^3$  ให้

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}a_0^2 - \frac{1}{3}a_2 &= 0 \\ a_2 &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

พิจารณาพจน์ที่  $t^4$  ให้

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}a_0a_1 - \frac{1}{4}a_3 &= 0 \\ a_3 &= 0 \end{aligned}$$

พิจารณาพจน์ที่  $t^5$  ให้

$$\begin{aligned} \frac{1}{20}a_1^2 + \frac{2}{15}a_0a_2 - \frac{1}{5}a_4 &= 0 \\ a_4 &= -\frac{1}{96} \end{aligned}$$

พิจารณาพจน์ที่  $t^6$  ให้

$$\begin{aligned} \frac{1}{12}a_0a_3 + \frac{1}{18}a_1a_2 - \frac{1}{6}a_5 &= 0 \\ a_5 &= 0 \end{aligned}$$

พิจารณาพจน์ที่  $t^7$  ให้

$$\begin{aligned} \frac{2}{35}a_0a_4 + \frac{1}{28}a_1a_3 - \frac{1}{7}a_6 - \frac{1}{63}a_2^2 &= 0 \\ a_6 &= \frac{17}{11520} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$a_0 = -\frac{1}{4}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{16}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = -\frac{1}{96}, \quad a_5 = 0, \quad a_6 = \frac{17}{11520}, \quad a_7 = 0, \dots,$$

ดังนั้น ได้ผลเฉลยจากสมการ (3.14) คือ

$$\begin{aligned} y(t) = Y_0(t) &= 1 + a_0t + \frac{a_1}{2}t^2 + \frac{a_2}{3}t^3 + \frac{a_3}{4}t^4 + \frac{a_4}{5}t^5 + \frac{a_5}{6}t^6 + \dots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t + \frac{1}{48}t^3 - \frac{1}{480}t^5 + \frac{17}{80640}t^7 + \dots, \end{aligned}$$

และข้อจำกัดสำหรับอนันต์พจน์นี้ จะได้ผลเฉลยที่แท้จริงดังสมการ (3.15)

### 3.3 สรุปผล

โฮโมโทปีเพอร์เทอร์เบชันรูปแบบใหม่ (NHPM) วิธีการโฮโมโทปีเพอร์เทอร์เบชันรูปแบบใหม่ (NHPM) สามารถหาผลเฉลยได้ สรุปได้ว่า สำหรับการแก้สมการเชิงอนุพันธ์รีคาคติที่เป็นที่รู้จักกันดี เมื่อใช้วิธีการนี้เราจะได้ผลเฉลยที่ถูกต้องสำหรับสมการรีคาคติ

ส่วนในวิธีการแยกโดเมียน (ADM), วิธีการโฮโมโทปีเพอร์เทอร์เบชัน (HPM), วิธีการวิเคราะห์แบบโฮโมโทปี (HAM) และ วิธีทำซ้ำแปรผัน (VIM) เราจะได้เซตของสมการเชิงอนุพันธ์ที่เกิดซ้ำ ซึ่งจะต้องแก้ปัญหาย่อยอย่างต่อเนื่องเพื่อให้ได้ผลเฉลยโดยประมาณ บางครั้งเราต้องคำนวณหลายอย่างในอนุกรม เพื่อให้ได้อนุกรมของการประมาณค่าที่สูงขึ้นด้วยความถูกต้องและยอมรับได้ แต่อย่างที่เราเห็นในวิธีการโฮโมโทปีเพอร์เทอร์เบชันรูปแบบใหม่ (NHPM) เราได้ใช้จากการประมาณค่าของผลเฉลยครั้งที่หนึ่งของ  $Y_1(t)$  เพื่อให้ได้ผลเฉลยที่แท้จริงของปัญหา การคำนวณโดยทั่วไปจะได้เซตของสมการไม่เชิงเส้นที่ไม่ทราบค่าในแต่ละสมการ เซตนี้สามารถแก้ปัญหาย่อยได้อย่างง่ายดายโดยใช้เมเปิล และนำค่าเหล่านี้ไปใช้ในการประมาณค่าของผลเฉลยครั้งที่หนึ่งเพื่อให้ได้ผลเฉลยที่แท้จริง

### เอกสารอ้างอิง

- [1] ชื่อผู้แต่ง. (ปีที่พิมพ์). ชื่อหนังสือ. (ครั้งที่พิมพ์-ถ้ามี). เมืองที่พิมพ์: สำนักพิมพ์.
- [2] (2553). พจนานุกรมศัพท์ทางคณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน. (10). กรุงเทพมหานคร: นานมีบุ๊คส์พับลิเคชันส์.
- [3] ชื่อผู้แต่ง. (ปีที่พิมพ์). ชื่อเรื่อง. ชื่อวารสาร, ปีที่(ฉบับที่), หน้าแรก-หน้าสุดท้าย. เมืองที่พิมพ์: สำนักพิมพ์.